

ПИТАЊА ЗА ПОПРАВНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ТРЕЋИ РАЗРЕД, ЧЕТВРТИ СТЕПЕН

1. Призма, површина и запремина призме
- 2.. Пирамида, површина и запремина пирамиде
3. Површина и запремина зарубљене пирамиде
4. Ваљак, површина и запремина ваљка
- 5 Купа, површина и запремина купе
6. Површина и запремина зарубљене купе
7. Лопта, површина и запремина лопте
8. Површина и запремина обртних тела
9. Скаларни производ два вектора
10. Векторски производ два вектора
11. Мешовити производ три вектора
12. Једначина праве, општи и главни облик једначине праве, сегментни облик једначине праве
13. Једначина круга, међусобни положај праве и круга
14. Једначина елипсе, међусобни положај праве и елипсе

15. Једначина хиперболе, међусобни положај праве и хиперболе
16. Једначина параболе, међусобни положај праве и параболе
17. Детерминанте
18. Систем једначина 3×3 , Гаусово правило
19. Аритметички низ
20. Геометријски низ

ПРИМЕРИ ЗАДАТАКА ЗА ПОПРАВНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ТРЕЋИ РАЗРЕД, ТЕХНИЧАРИ

НАПОМЕНА:

Актив математике је саставио испитна питања и задатке као помоћ ученицима да савладају предвиђено градиво. Задаци који следе су само пример типова задатака, не и конкретни задаци који ће бити на испиту. Подељени су у две групе. Прва група су задаци основног нивоа, и то је оно што сваки кандидат треба да задовољи. Друга група су задаци средњег или напредног нивоа.

ОСНОВНИ НИВО

I АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- У координатном систему скицирати праве и кружницу.
 $p_1: x+y-2=0$, $p_2: x+y-4=0$, $p_3: x+2y-3=0$, $p_4: 2x+y-3=0$, $p_5: x+y+1=0$ $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.
Која права није ни тангента ни сечица кружнице?
- а) Одредити пресек правих $4x-3y=0$ и $y-x=1$.
б) Одредити растојање тачке $S(3,4)$ од координатног почетка.
- а) Одредити једначину праве b која садржи тачку $P(-5,13)$ и нормална је са правом $a: 2x-3y-3=0$.
б) Одредити пресек S праве $b: 3x+2y-11=0$ и дате праве a .
в) Одредити координате тачке R такве да је тачка S средиште дужи PR .
- Написати једначину праве која садржи пресек правих $x-3y+1=0$ и $2x+5y+13=0$, а ортогонална је на праву $2x-y+3=0$.
- а) Одредити једначину праве b која садржи тачку $P(8,9)$ и нормална је са правом $a: x+2y+5=0$.
б) Одредити пресек S праве $b: -2x+y+7=0$ и дате праве a .
- Наћи ортогоналну пројекцију тачке $T(1,2)$ на праву $x+y+1=0$.
- Одредити једначину симетрале дужи чије су крајње тачке $A(4,1)$ и $B(2,5)$
- Одредити растојање тачке $A(2,1)$ од праве $3x+4y+1=0$.
- Одредити површину троугла ако његове странице припадају правима $x+y-4=0$, $x-y+2=0$ и $3x-y-8=0$.
- Темена троугла су тачке $A(-5,-8)$, $B(-5,2)$ и $C(3,0)$.
а) Одредити једначине симетрала страница AC и BC троугла.
б) Одредити пресек правих $x+y+5=0$ и $4x-y+5=0$.
в) Одредити растојање тачке $S(-2,-3)$ од тачке A .
- Ако тачка $M(x,y)$ припада правој $2x+y-6=0$ и ако је једнако удаљена од тачака $A(3,5)$ и $B(2,6)$, одредити производ $xу$.
- Два наспрамна темена квадрата су $A(-1,3)$ и $C(5,1)$. Написати једначину праве одређене дијагоном BD .
- Дата је кружница $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.
а) Одредити координате центра M те кружнице.
б) Одредити растојање тачке $M(1,-2)$ од тачке $N(3,2)$.
в) Одредити једначину кружнице чији је центар тачка M , а пролази кроз тачку N .
- Написати једначину тангенти кружнице $(x-2)^2+y^2=1$ које пролазе кроз координатни почетак.
- а) Одредити једначине тангенти елипсе $x^2+3y^2=12$ које садрже тачку $P(0,4)$.
б) Одредити угао између правих $y=x+4$ и $y=-x+4$.

16. Одредити једначине тангенти хиперболе $x^2-4y^2=20$ које су нормалне на праву $4x+3y+8=0$.
17. Одредити једначину тангенте хиперболе $2x^2 - 5y^2 = 30$ која је паралелна правој $x + y - 7 = 0$.
18. Одредити једначину тангенте елипсе $x^2 + 4y^2 = 20$ која је нормална на праву $2x - 2y - 13 = 0$.
- 19.
20. Из тачке $A(5,9)$ конструисане су тангенте на параболу $y^2=5x$. Одредити једначину праве одређене додирним тачкама.
21. а) Одредити координате центра круга $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.
б) Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од тачке $S(2,2)$.
22. Одредити растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ од координатног почетка.
23. Наћи пресечне тачке параболу $y^2=4x$ и кружнице $x^2-9x+y^2+4=0$.
24. Права $2x-3y+4=0$ сече параболу $y^2=4x$ у два тачкама. Написати једначине тангенти параболу у тим тачкама.

II ПЛАНАМЕТРИЈА И СТЕРЕОМЕТРИЈА

25. У оштроуглом троуглу су дате две странице $a=15$ cm и $b=13$ cm и полупречник описане кружнице $R=8,125$ cm. Израчунати трећу страницу тог троугла.
26. Симетрале два унутрашња угла троугла заклапају угао од 137° . Израчунати трећи угао тог троугла.
27. Израчунати полупречнике уписане и описане кружнице троугла чије су странице $a=5$ cm, $b=12$ cm и $c=13$ cm
28. Збир катета правоуглог троугла је 17, а дужина његове хипотенузе 13. Колика је површина тог троугла?
29. Наћи углове једнакокраког троугла чија је површина $4\sqrt{3}$, а висина која одговара основици је дужине 2.
30. Квадрат и једнакостраничан троугао имају једнаке обиме. Површина троугла је $9\sqrt{3}$. Израчунати дијагоналу квадрата.
31. Око круга полупречника 15 cm описан је једнакокраки трапез чија је дужина крака 17 cm. Израчунати мању основицу трапеза.
32. Површина паралелограма страница 10 cm и 12 cm је 60 cm². Израчунати збир дужина висина тог паралелограма.
33. Канал за воду дугачак је 5 m и може да прихвати 1440 литара воде. Попречни пресек канала је једнакокраки трапез чији је крак 52 cm, а висина 48 cm. Колика воде прихвата канал до половине своје висине?

34. Једнакостраничан троугао странице $a=2$ cm ротира око праве p која је нормална на основицу AB троугла и садржи теме A тог троугла. Одредити запремину насталог тела .
35. У једнакостраничан троугао странице $a=6\sqrt{3}$ cm уписан је круг. Ако ова фигура ротира око висине троугла , наћи однос запремина ротационих тела добијених ротацијом троугла и круга.
36. Висина и изводница праве купе односе се као 4:5, а њена запремина је 96π cm³. Израчунати површину те купе .
37. Основна ивица правилне четворостране пирамиде је $a=18$ cm, а бочна ивица је за 3 cm дужа од висине пирамиде. Израчунати површину пирамиде .
38. Дужина основне ивице правилне тростране пирамиде је 6, а бочна ивица заклапа са равни основе угао од 45° . Одредити запремину пирамиде.
39. Када се омотач купе развије у равни, добије се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$ cm. Израчунати запремину купе.
40. Основа пирамиде је једнакокраки трапез са паралелним страницама $a=5$ cm и $b=3$ cm и краком $c=7$ cm. Подножје висине пирамиде је у пресеку дијагонале основе , а већа бочна ивица пирамиде је 10cm. Израчунати запремину пирамиде .
41. Дужина висине правилног тетраедра је $H=2$ cm. Одредити дужину ивице тог тетраедра .
42. Дужина основне ивице правилне четворостране пирамиде је 18 cm, а висина бочних страна је за 3 cm дужа од висине пирамиде. Израчунати површину пирамиде.
43. Одредити растојање темена B од дијагонале AC' коцке $ABCD A'B'C'D'$ ивице 1 cm .
44. Површина правог ваљка је 8π cm², а висина му је за 1cm краћа од пречника основе. Наћи запремину ваљка.
45. Бочна ивица правилне четворостране пирамиде је 3 dm и са равни основе гради угао од 45° . Наћи запремину пирамиде.

III АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

46. Збир три броја који образују растућу геометријску прогресију је 126. Ако је средњи члан једнак 24 одредити најмањи члан.
47. Решити једначину $2+4+6+\dots+X=2550$, где је X природан број.
48. Збир прва четири члана аритметичке прогресије је за 8 мањи од двоструког збира прва три члана те прогресије. Ако је четврти члан те прогресије 19 одредити њен пети члан.
49. Збир прва три члана геометријске прогресије је 14, а збир првог и трећег члана је два пута већи од збира другог и четвртог члана. Одредити трећи члан те прогресије.

50. Збир три узастопна члана аритметичке прогресије је 150. Ако је највећи од њих четири пута већи од најмањег израчунати њихов производ.
51. Четири броја чине растући аритметички низ. Њихов збир је 16, а збир њихових квадрата је 84. Израчунати збир њихових кубова.
52. Наћи три броја која чине аритметичку прогресију, ако је њихов збир 18, а производ 162.
53. Пети члан аритметичке прогресије је 16 а једанаести је 34. Израчунати збир првих 17 чланова те прогресије.
54. Четири позитивна броја чине геометријску прогресију. Ако је први већи од другог за 36, а трећи од четвртог за 4, израчунати њихов производ.

IV СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА

55. Решити систем једначина а) Гаусовом методом б) методом детерминанти:
 $3x + y + z = 2 \wedge x - 2y + 3z = -3 \wedge x + y + z = 6.$
56. Решити систем једначина а) Гаусовом методом б) методом детерминанти:
 $2x + y - z = -9 \wedge x + y + z = 0 \wedge 3x - 2y + z = 7.$

V ВЕКТОРИ

57. Одредити скаларни производ вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$, где су \vec{i} и \vec{j} узајамно ортогонални јединични вектори.
58. Одредити скаларни производ вектора $\vec{a} = (4, -3, 1)$ и $\vec{b} = (5, -2, -3)$.
59. Одредити векторски производ вектора $\vec{a} = (3, -2, 5)$ и $\vec{b} = (2, -1, 3)$.
60. Одредити мешовити производ вектора $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0)$

СРЕДЊИ ИЛИ НАПРЕДНИ НИВО

I АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. Дата је кружница $x^2+y^2=169$. Одредити дужину њене тетиве чије је средиште у тачки $S(3,4)$.
2. Само једна од правих $p_1:x+y-2=0$, $p_2:x+y-4=0$, $p_3:x+2y-3=0$, $p_4:2x+y-3=0$, $p_5:x+y+1=0$ није ни тангента ни сечица кружнице $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Која?
3. Одредити растојање пресечне тачке правих $4x-3y=0$ и $y-x=1$ од координатног почетка.
4. Одредити тачку R симетричну са тачком $P(-5,13)$ у односу на праву $2x-3y-3=0$.
5. Одредити ортогоналну пројекцију тачке $A(8,9)$ на праву $x+2y+5=0$.
6. Наћи угао под којим се елипса $x^2+3y^2=12$ види из тачке $P(0,4)$.
7. Одредити растојање између тангенти хиперболе $x^2-4y^2=20$ које су нормалне на праву $4x+3y+8=0$.
8. Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од центра круга $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.
9. Одредити растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ од координатног почетка.
10. Ако је дужина тетиве кружнице $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ на оси Ox једнака 6, наћи дужину тетиве те кружнице на оси Oy .
11. Праве p и q садрже тачку $T(3,6;4,8)$, међусобно су нормалне и са осом Ox граде троугао површине 24. Одредити обим тог троугла.
12. Одредити параметар p тако да права $y=2x+p$ у равни Oxy додирује параболу $y=x^2-x$.
13. Темена троугла су тачке $A(-5,-8)$, $B(-5,2)$ и $C(3,0)$. Израчунати једначине симетрала страница троугла и полупречник описаног круга.
14. Наћи параметар k тако да права $y=kx+11$ додирује елипсу $3x^2+2y^2=11$.
15. Одредити угао под којим се елипса $x^2+3y^2=12$ види из тачке $P(0,4)$.
16. Написати једначину кружнице чији је центар пресек правих $x+y=3$ и $3x-y=5$, а која додирује праву $x-y=2$.
17. Дате су тачке $A(1,2)$, $B(2,3)$ и $C(2,5)$. Написати једначину кружнице којој је центар тачка C , а тангента је права одређена тачкама A и B .
18. Написати једначину праве којој припада тетива кружнице $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, а чије је средиште тачка $A(3,0)$.
19. Одредити једначину елипсе која додирује праве $x+y-8=0$ и $x+3y+16=0$.
20. Написати једначину кружнице која је концентрична кружници $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ и пролази кроз тачку $M(3,2)$.
21. Дате су тачке $A(1,1)$ и $B(3,11)$. Одредити збир координата тачке S која дели дуж AB у размери $AS:SB=3:7$.
22. Одредити најкраће растојање тачке M на кругу $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ од тачке N на кругу

$$(x+4)^2+(y-5)^2=9.$$

23. Дата је парабола $y^2=2px$ и кружница са центром у жижи те параболе и полупречником $r=2p$. Наћи угао под којим се секу те криве.
24. Одредити остала темена и површину троугла ако је дато теме $A(4,-1)$, $h_c: 2x-3y+12=0$ и $t_c: 2x+3y=0$.
25. Израчунати површину површи која је ограничена елипсом која садржи тачке $A(4,1)$ и $B(-2,-2)$ и хиперболом $xy=4$.
26. Одредити координате тачке C која је подједнако удаљена од тачака $A(2,3)$ и $B(5,6)$, ако је њено растојање од координатног почетка $d = 5\sqrt{2}$.
27. На кругу $x^2+y^2-2x-4y=20$ наћи тачку A најближу правој $3x+4y+34=0$ и израчунати растојање тачке A од те праве.
28. Одредити једначине тангенти елипсе $x^2+3y^2=28$ које са правом $x-5y-20=0$ граде угао од 45° .

II ПЛАНАМЕТРИЈА И СТЕРЕОМЕТРИЈА

29. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом у темену C и нека су његове катете $BC=a$ и $AC=b$. Ако је D пресечна тачка симетрале правог угла и хипотенузе AB и D_1 нормална пројекција тачке D на катету AC . Израчунати DD_1 .
30. Тежишне дужи AD и CE троугла ABC секу се у тачки T . Средиште дужи AE је тачка F . Израчунати однос површина тругова TFC и ABC .
31. Ако је полупречник описаног круга правоуглог троугла 5 cm , а полупречник уписаног 2 cm , израчунати дужине његових катета.
32. Дат је квадрат $ABCD$ странице 8 cm . Кружница садржи темена A и D и додирује страницу BC . Израчунати полупречник те кружнице.
33. Ако тачка додира уписаног круга правоуглог троугла и хипотенузе дели хипотенузу на одсечке дужине 5 cm и 12 cm , израчунати разлику катета тог троугла.
34. Средња линија трапеза дели трапез на два дела чије се површине односе као $7:5$. Одредити однос основица тог трапеза.
35. Око кружнице полупречника 2 cm описан је једнакократи трапез површине 20 cm^2 . Израчунати дужину крака тог трапеза.
36. У дату праву купу полупречника основе r и висине $H=r$ уписана је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ тако да основа $ABCD$ припада основи купе, а темена A_1, B_1, C_1 и D_1 припадају омотачу купе. Наћи однос запремина купе и коцке.
37. У коцку $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ уписана је четворострана пирамида $ABCD A_1$. Ако је површина пирамиде 1 cm^2 , одредити површину коцке.

38. На раван сто су стављене три лопте полупречника различитих дужина. Оне додирују сто у тачкама А, В и С и сваке две се међусобно додирују. Ако су странице троугла АВС једнаке $AB=4$ cm, $BC=6$ cm и $CA=8$ cm, одредити производ дужина полупречника те три лопте.
39. Одредити запремину паралелепипеда чије су све стране ромбови странице a и оштрог угла 60° .
40. Сфера S_1 полупречника r_1 уписана је у коцку ивице 1 , а сфера S_2 полупречника r_2 описана је око те коцке. Наћи збир $r_1^2 + r_2^2$.
41. Основа тростране пирамиде је једнакостраничан троугао странице a , а ортогонална пројекција врха те пирамиде на раван основе је тежиште тог троугла. Ако бочне стране граде са равни основе углове од 60° , израчунати површину пирамиде.
42. Ако је α угао диедра правилног тетраедра странице a , одредити $\cos\alpha$.
43. Полупречник основе праве купе је r , а две узајамно нормалне изводнице деле омотач те купе у односу $1:2$. Наћи запремину купе.
44. Одредити запремину правилног тетраедра уписаног у сферу полупречника R .
45. Одредити запремину правилне четворостране пирамиде чија је бочна ивица s , а α угао који она заклапа са равни основе.
46. Коцка $ABCA'B'C'D'$ је странице a . Наћи запремину пирамиде чија су темена $DCA'D'$.
47. У једнакоивичну четворострану пирамиду уписана је коцка тако да се темена горње основе коцке поклапају са средиштима страна пирамиде, а доња основа лежи у основи пирамиде. Наћи однос запремина та два тела.
48. У правилан тетраедар ивице a уписана је правилна тространа призма тако да се темена горње основе призме поклапају са центрима страна тетраедра, а доња основа призме припада основи тетраедра. Израчунати однос запремина та два тела.
49. Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом правоугаоника око његове дијагонале ако се зна да су странице правоугаоника 20 cm и 15 cm.
50. Једнакокраки трапез чије су основе 25 cm и 7 cm и чија је дијагонала нормална на крак ротира око крака. Израчунати површину и запремину насталог тела.
51. У купу полупречника r и висине H уписана је коцка. Израчунати однос запремина та два тела.
52. Ромб чије су дијагонале 3 dm и 4 dm ротира око висине која пролази кроз центар ромба. Израчунати површину и запремину насталог тела.

III АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИЈСКА ПРОГРЕСИЈА

53. Ако је n -ти члан аритметичке прогресије једнак m , а m -ти члан једнак n одредити a_{n-m} .
54. Трећи чланови аритметичког и геометријског низа су једнаки и износе 6 . Ако су и први чланови ових низова једнаки, а збир првих 6 чланова аритметичког низа је $42,75$ одредити шести члан геометријског низа.

55. Дужина дијагонале правоуглог паралелоипеда је 6 cm , а површина 72 cm². Израчунати основне ивице тог паралелоипеда ако се зна да оне образују геометријску прогресију.
56. Цифре једног троцифреног броја образују растући аритметички низ. Ако овај број поделимо збиром његових цифара , добија се количник 12 и остатак 3. Ако се броју дода 594, добија се број написан истим цифрама обрнутим редом. Одредити тај број.
57. Решити једначину $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = 4$.
58. Решити једначину $546 - 2^n = 004$, где је n природан број.
59. Збир k узастопних природних бројева је 66 (први може, а и не мора бити 1). Колико различитих вредност броја k има?
60. Бројеви a₁, a₂ и a₃ су три узастопна члана геометријске прогресије са количником q=2 , а бројеви a₂, a₃ и a₄ су три узастопна члана аритметичке прогресије са разликом d=6. Наћи збир a₁+a₂+a₃+a₄.
61. Три броја чији је збир 26 чине геометријски низ. Увећа ли се средњи члан за 4 добија се аритметички низ. Који су то бројеви?
62. Збир три броја је 21, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{7}{12}$. Ако ти бројеви образују растући геометријски низ израчунати њихов производ.
63. Три броја чији је збир 63 образују аритметички низ. Ако од првог одузмемо 7, од другог 9, а од трећег 5 добија се геометријски низ. Који су то бројеви?
64. Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо редом 25, 27 и 1 добићемо три броја која образују аритметички низ. Одредити седми члан датог геометријског низа.

IV СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА

65. Решити систем једначина: $3x + y + z = 2 \wedge x - 2y + 3z = -3 \wedge x + y + z = 6$.
66. Решити систем једначина: $\frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{3}{z} = -2 \wedge \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = 9 \wedge \frac{5}{x} - \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 1$.
67. Решити систем једначина: $\frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4 \wedge \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} = 4 \wedge \frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} = 4$.
68. Решити систем једначина (a је реалан параметар):
- $$\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{array}$$
-
69. Решити систем једначина (a је реалан параметар):
- $$\begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{array}$$
-

V ВЕКТОРИ

70. Одредити скаларни производ вектора \vec{a} и $2\vec{a} - \vec{b}$ ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
71. Израчунати интензитет збира вектора \vec{a} и \vec{b} , ако је $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
72. Ако је, $|\vec{b}| = 5$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, израчунати $\vec{a} \times \vec{b}$.
73. Ако је $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, израчунати $\vec{p} \times \vec{q}$.
74. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = (2, 1, 2)$ и $\vec{b} = (3, 2, 2)$.
75. Израчуунати запремину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0)$
76. Доказати да су вектори $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, 4)$ и $\vec{c} = (-3, 9, 6)$ компланарни.
77. Израчунати запремину тетраедра чија су темена дата координатама $A = (2, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (6, 3, 7)$ и $D = (-5, -4, 8)$